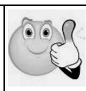
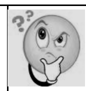
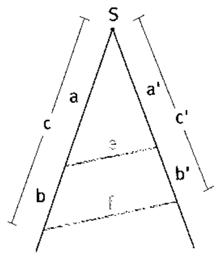
Geometrie

Selbstdiagnosebogen

Kreuzen Sie bei den nachfolgenden Aufgaben an, wie sicher Sie sich bei ihrer Bearbeitung fühlen. Seien Sie ehrlich zu sich selbst! Dieser Bogen wird <u>nicht</u> benotet!

<table>
<tr><th>Wie sicher fühlen Sie sich bei der Bearbeitung der Aufgabe?</th><th>Beispielaufgaben</th><th>
sicher</th><th>
fast sicher</th><th>
etwas un-sicher</th><th>
sehr un-sicher</th></tr>
<tr><td>1. Ich kann mithilfe der Strahlensätze fehlende Streckenlängen ermitteln.

• Ähnliche Figuren und Körper
• Anwendungen</td><td>Berechnen Sie jeweils die gesuchte Strecke:


a) geg.: a = 2 cm, b = 6 cm, b’ = 9 cm; ges.: a’
b) geg.: a’ = 3 cm, b’ = 2 cm, e = 4 cm; ges.: f</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Ich kann mithilfe der Sätze am rechtwinkligen Dreieck (Satz des Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz) fehlende Streckenlängen ermitteln.

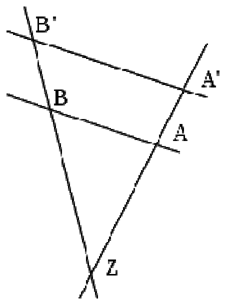
• Umkehrung des Pythagoras
• Pythagoras in Figuren und Körpern
• Anwendungen</td><td>Füllen Sie diese Tabelle für ein rechtwinkliges Dreieck mit α = 90° aus:
<table><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>h</th><th>p</th><th>q</th></tr><tr><td>a)</td><td>10 cm</td><td></td><td>8 cm</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>b)</td><td></td><td></td><td></td><td>12 cm</td><td>9 cm</td><td></td></tr><tr><td>c)</td><td></td><td></td><td>6 cm</td><td></td><td></td><td>3 cm</td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Ich kann mithilfe der Winkelfunktionen (Sinus, Kosinus, Tangens) am rechtwinkligen Dreieck fehlende Streckenlängen und Winkel ermitteln.

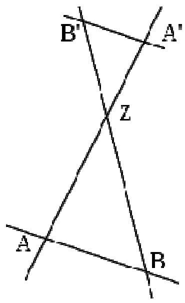
• Besondere Winkel
• Zusammenhänge der Winkelfunktionen
• Winkelfunktionen in Figuren und Körpern
• Anwendungen</td><td>Berechnen Sie in den folgenden rechtwinkligen Dreiecken die fehlenden Größen:
a) α = 90°, β = 35°, a = 8 cm
b) β = 90°, γ = 17,5°, c = 9,5 cm</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Ich kann mithilfe der Winkelfunktionen am schiefwinkligen Dreieck (Sinussatz, Kosinussatz) fehlende Streckenlängen und Winkel ermitteln.

• Winkelfunktionen in Figuren und Körpern
• Anwendungen</td><td>Berechnen Sie die fehlenden Größen, wenn vom Dreieck gegeben sind:
a) c = 8 cm, α = 49°, β = 23°
b) a = 5 cm, b = 6 cm, c = 7 cm</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Geometrie
Selbstdiagnosebogen – Tipps

1. <u>**Strahlensätze**</u>





In der „V-Figur” und der „X-Figur” gilt:

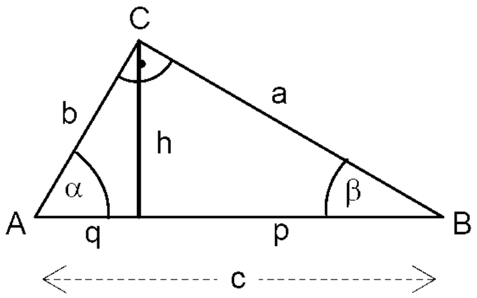
1. Strahlensatz
Das Streckenverhältnis auf dem einem Strahl ist genau so groß wie das Streckenverhältnis auf dem anderen Strahl.

$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$ und $\frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}}$

2. Strahlensatz
Das Streckenverhältnis auf dem einen Strahl ist genau so groß wie das Streckenverhältnis der beiden Parallelen zueinander.

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$

2. <u>**Satzgruppe des Pythagoras**</u>



In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die längste Seite **Hypotenuse**. Die anderen Seiten nennt man **Katheten**.

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit den Katheten a und b, der Hypotenuse c, der Höhe h (auf c) und den Hypotenusenabschnitten p und q, dann gilt:

Satz des Pythagoras
$a^2 + b^2 = c^2$
Summe der beiden Kathetenquadrate gleich Hypotenusenquadrat

Höhensatz
$h^2 = p \cdot q$
Höhenquadrat gleich Rechteck aus den beiden Hypotenusen-abschnitten

Kathetensatz
$a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$
Kathetenquadrat gleich Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt

Umkehrung des Pythagoras
Wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig (mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c).

Berechnen von Streckenlängen mit dem Pythagoras:
1) Skizze machen und beschriften
2) Nach rechtwinkligen Dreiecken suchen, ggf. Hilfslinien einzeichnen
3) Satz des Pythagoras anwenden (ggf. mehrfach)

3. <u>**Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken**</u> *(→ Skizze: siehe **2.**)*

a ist **Gegenkathete** zu α, b ist **Ankathete** zu α
b ist **Gegenkathete** zu β, a ist **Ankathete** zu β

Sinus eines Winkels α	**Kosinus** eines Winkels α	**Tangens** eines Winkels α
$= \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$	$= \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$	$= \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete}}$
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$; $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$	$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$; $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$	$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$; $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$

Einstellung des TR beachten:
DEGREE bzw. DEG entspricht dem Winkelmaß in Grad (rechter Winkel = 90°)

Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen:

2 Seiten gegeben
1) Einen Winkel berechnen
Wenn man aus zwei gegebenen Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck einen Winkel berechnen möchte, verwendet man die „Umkehrung" von sin, cos und tan, d.h. $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ bzw. $\tan^{-1}$.
2) Anderen Winkel berechnen (**Winkelsumme**)
3) Dritte Seite berechnen (**Pythagoras** möglich)
1 Seite, 1 Winkel gegeben
1) Anderen Winkel berechnen (**Winkelsumme**)
2) Andere Seite berechnen (Winkelbeziehung notieren und umformen)
3) Dritte Seite berechnen (**Pythagoras** möglich)

4. <u>**Winkelfunktionen in schiefwinkligen Dreiecken**</u>

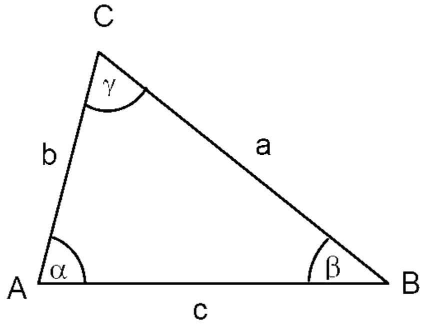
In jedem Dreieck gilt:

Sinussatz
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Kosinussatz
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos(\alpha)$,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos(\beta)$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos(\gamma)$

Dreiecke mit Winkelsätzen berechnen:

SsW (Seite-Seite-Winkel) Die 2. Seite ist die kleinere Seite.
1) **2. Winkel** berechnen mit dem **Sinussatz**
2) **3. Winkel** berechnen mit der **Winkelsumme**
3) **3. Seite** berechnen mit dem **Sinussatz**
WWS (Winkel-Winkel-Seite) / **WSW** (Winkel-Seite-Winkel)
1) **3. Winkel** berechnen mit der **Winkelsumme**
2) **2. Seite** berechnen mit dem **Sinussatz**
3) **3. Seite** berechnen mit dem **Sinussatz**
SWS (Seite-Winkel-Seite)
1) **3. Seite** berechnen mit dem **Kosinussatz**
2) **2. Winkel** berechnen mit dem **Sinussatz**
3) **3. Winkel** berechnen mit der **Winkelsumme**
SSS (Seite-Seite-Seite)
1) **1. Winkel** berechnen mit dem **Kosinussatz**
2) **2. Winkel** berechnen mit dem **Sinussatz**
3) **3. Winkel** berechnen mit der **Winkelsumme**



Winkelsumme
Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Geometrie
Selbstdiagnosebogen – Lösungen

1.

a) 1. Strahlensatz:

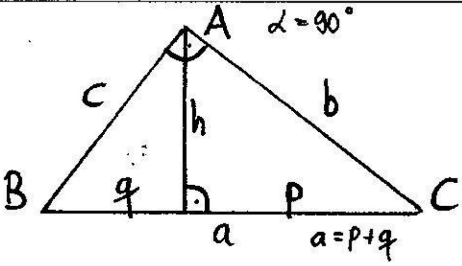
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow a' = b' \cdot \frac{a}{b}\ ;\ a' = 9\,cm \cdot \frac{2\,cm}{6\,cm} = \underline{3\,cm}$$

b) 2. Strahlensatz:

$$\frac{e}{f} = \frac{a'}{a'+b'} \Rightarrow f = e \cdot \frac{a'+b'}{a'}\ ;\ f = 4\,cm \cdot \frac{5\,cm}{3\,cm} = \frac{20}{3}\,cm$$

$$\underline{\approx 6{,}7\,cm}$$

2.



Satz des Pythagoras:
$a^2 = b^2 + c^2,\ b^2 = h^2 + p^2,\ c^2 = h^2 + q^2$

Kathetensatz: $b^2 = a \cdot p,\ c^2 = a \cdot q$

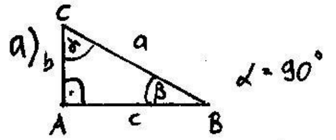
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

	a	b	c	h	p	q
a)	10cm	6cm	8cm	4,8cm	3,6cm	6,4cm
b)	25 cm	15cm	20cm	12cm	9cm	16cm
c)	12 cm	10,4cm	6cm	5,2cm	9cm	3cm

3.

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\quad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

a)



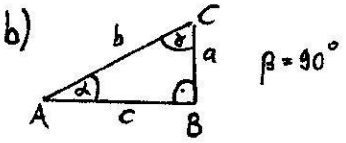
$\alpha = 90°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = \underline{55°}$

$\sin(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \sin(\beta)$
$\approx \underline{4{,}6\,cm}$

$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos(\beta)$
$\approx \underline{6{,}6\,cm}$

b)



$\beta = 90°$

$\alpha = 180° - \beta - \gamma = \underline{72{,}5°}$

$\tan(\gamma) = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\tan(\gamma)} \approx \underline{30{,}1\,cm}$

$\sin(\gamma) = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{c}{\sin(\gamma)} \approx \underline{31{,}6\,cm}$

4.

Sinussatz (2 Seiten und 1 Gegenwinkel; 2 Winkel und 1 Seite): $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Kosinussatz (3 Seiten; 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel):
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha),\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta),\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

a) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = \underline{108°}$

$a = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \approx \underline{6{,}3\,cm}$

$b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \approx \underline{3{,}3\,cm}$

b) $\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}7143;$

$\underline{\alpha \approx 44{,}4°}$

$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} \approx 0{,}8396;$

$\underline{\beta \approx 57{,}1°}$ $\quad \gamma = 180° - \alpha - \beta \approx \underline{78{,}5°}$