

Stochastik

Selbstdiagnosebogen

Kreuzen Sie bei den nachfolgenden Aufgaben an, wie sicher Sie sich bei ihrer Bearbeitung fühlen. Seien Sie ehrlich zu sich selbst! Dieser Bogen wird nicht benotet!

Wie sicher fühlen Sie sich bei der Bearbeitung der Aufgabe?	Beispielaufgaben	 sicher	 fast sicher	 etwas unsicher	 sehr unsicher
Statistik	Gegeben ist folgende Urliste: 3; 4; 2; 6; 7; 8; 2; 4; 8; 7; 6; 6; 5; 4; 3; 2; 4; 5; 6; 7.				
1. Ich kann Häufigkeitstabellen erstellen und interpretieren. <ul style="list-style-type: none"> • Merkmale • absolute Häufigkeit • relative Häufigkeit • Vierfeldertafel 	Entwerfen Sie eine Häufigkeitstabelle mit den absoluten und relativen Häufigkeiten.				
2. Ich kann Diagramme erstellen und interpretieren. <ul style="list-style-type: none"> • Stabdiagramm • Säulendiagramm • Histogramm • Kreisdiagramm 	Zeichnen Sie ein a) Säulendiagramm, b) Histogramm mit der Klassenbreite 2, c) Kreisdiagramm.				
3. Ich kann Mittelwerte berechnen und interpretieren. <ul style="list-style-type: none"> • arithmetisches Mittel • Median • Modalwert 	a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel. b) Geben Sie den Median an. c) Geben Sie den Modalwert an.				
4. Ich kann Streuungsmaße berechnen und interpretieren. <ul style="list-style-type: none"> • Spannweite • mittlere Abweichung vom Mittelwert • Varianz • Standardabweichung 	a) Geben Sie die Spannweite an. b) Berechnen Sie die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel. c) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.				
Wahrscheinlichkeitsrechnung	Eine Urne enthält 2 rote, 3 schwarze und 5 gelbe Kugeln.				
5. Ich kann Ergebnisse und Ereignisse von Zufallsexperimenten angeben. <ul style="list-style-type: none"> • Ergebnismenge • Ereignismenge • Mächtigkeit • Gegenereignis • Verknüpfungen (und/oder) 	Nacheinander werden zwei Kugeln gezogen. a) Geben Sie die Ergebnismenge an. b) Schreiben Sie folgende Ereignisse in der Mengenschreibweise. A: beide Kugeln sind verschiedenfarbig B: die zweite Kugel ist gelb c) Bilden Sie \bar{A} , $A \cap B$ und $A \cup B$.				
6. Ich kann Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten berechnen. <ul style="list-style-type: none"> • Laplace-Regel • Gegenwahrscheinlichkeit • Additionsregel 	Es wird eine Kugel gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse. C: die Kugel ist rot D: die Kugel ist nicht schwarz				
7. Ich kann Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnen sowie reale Zufallsvorgänge mit einem Urnenexperiment simulieren. <ul style="list-style-type: none"> • Ziehen mit und ohne Zurücklegen • Baumdiagramm • Pfadregeln 	Nacheinander werden zwei Kugeln a) mit Zurücklegen, b) ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse. E: die erste Kugel ist rot und die zweite Kugel ist gelb F: beide Kugeln sind gleichfarbig G: höchstens eine Kugel ist schwarz				

Stochastik

Selbstdiagnosebogen – Tipps

1. Häufigkeitstabellen

Quantitative Merkmale haben als Ausprägung Zahlen oder Größenwerte.
Qualitative Merkmale haben als Ausprägung Eigenschaften.

Absolute Häufigkeit f_i : So oft tritt die Merkmalsausprägung auf.

Relative Häufigkeit h_i : Setzt die absolute Häufigkeit ins Verhältnis zum

Stichprobenumfang: $h_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl}} = \frac{f_i}{n}$ mit $n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Vierfeldertafel: Geeignet, um Zusammenhänge zwischen zwei Merkmalen zu erfassen

absolute Häufigkeiten:

	A	\bar{A}	Σ
B	$ A \cap B $	$ \bar{A} \cap B $	$ B $
\bar{B}	$ A \cap \bar{B} $	$ \bar{A} \cap \bar{B} $	$ \bar{B} $
Σ	$ A $	$ \bar{A} $	n

relative Häufigkeiten:

	A	\bar{A}	Σ
B	$h(A \cap B)$	$h(\bar{A} \cap B)$	$h(B)$
\bar{B}	$h(A \cap \bar{B})$	$h(\bar{A} \cap \bar{B})$	$h(\bar{B})$
Σ	$h(A)$	$h(\bar{A})$	1=100%

Σ : Summe

\bar{A} : Gegenereignis von A

$| \cdot |$: Mächtigkeit

\cap : Schnittmenge

(\rightarrow siehe auch 5.)

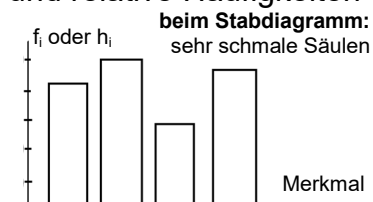
Die Vierfeldertafel mit den relativen Häufigkeiten liefert auch Wahrscheinlichkeiten

(\rightarrow siehe auch 6.).

2. Diagramme

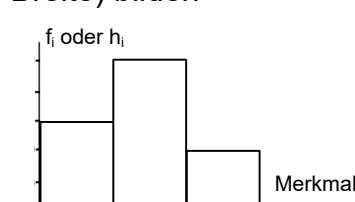
Säulendiagramm:

Geeignet für absolute und relative Häufigkeiten



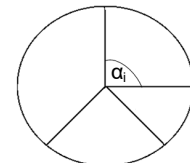
Histogramm:

Klassen (mit gleicher Breite) bilden



Kreisdiagramm:

Besonders geeignet für relative Häufigkeiten; Sektorwinkel: $\alpha_i = 360^\circ \cdot h_i$



3. Mittelwerte

Arithmetisches Mittel (Durchschnitt) \bar{x} :

Alle Werte zusammenzählen und durch die Gesamtanzahl teilen:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{einfaches arithmetisches Mittel}) \text{ bzw. bei einer}$$

Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{n}$ (gewogenes arithmetisches

Mittel); bei Klassen: wie gewogenes arithmetisches Mittel, die x-Werte sind die Klassenmitten

Median (Zentralwert) \tilde{x} :


1. Datensatz der Größe nach ordnen.

2. Bei einer ungeraden Anzahl von Werten ist der Median in der Mitte: $\tilde{x} = \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{2}$

3. Bei einer geraden Anzahl von Werten wird das arithmetische Mittel der beiden

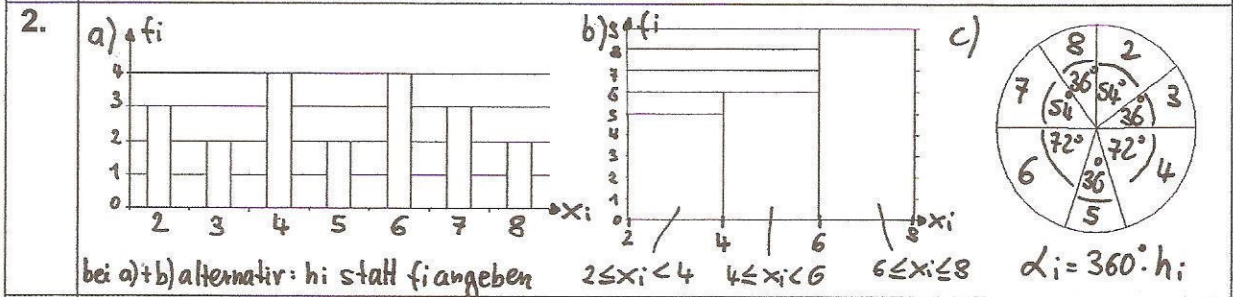
mittleren Werte gebildet: $\tilde{x} = \frac{\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{2}}{2}$

Modalwert (Modus) x_{mod} : Wert, der am häufigsten vorkommt

<p>4.</p>	<p><u>Streuungsmaße</u></p> <p>Spannweite w: Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert: $W = X_{\max} - X_{\min}$</p> <p>Mittlere Abweichung vom Mittelwert d_M: $d_M = \frac{ x_1 - M + x_2 - M + \dots + x_n - M }{n}$ bzw. bei einer Häufigkeitsverteilung: $d_M = \frac{ x_1 - M \cdot f_1 + x_2 - M \cdot f_2 + \dots + x_n - M \cdot f_n}{n}$ mit $M = \bar{x}$ oder \check{x} oder x_{mod}</p> <p>Varianz v: Mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel: $v = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ bzw. bei einer Häufigkeitsverteilung: $v = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{n}$</p> <p>Standardabweichung s: Wurzel aus der Varianz: $s = \sqrt{v}$ bzw. $v = s^2$ Sie gibt die durchschnittliche Streuung um das arithmetische Mittel an.</p>
<p>5.</p>	<p><u>Ergebnisse und Ereignisse</u></p> <p>Ergebnis: Der Ausgang eines Experiments, also das, was man „direkt sieht“.</p> <p>Ergebnismenge Ω: Enthält die möglichen Ergebnisse des Experiments.</p> <p>Ereignismenge E: Die Menge von einem oder mehreren Ereignissen.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elementarereignis: enthält genau ein Ergebnis • sicheres Ereignis: enthält alle Ergebnisse und tritt daher immer ein • unmögliches Ereignis: enthält kein Ergebnis und tritt daher nie ein • Gegenereignis (\bar{E}): enthält alle Ergebnisse, die nicht zum „ursprünglichen“ Ereignis gehören <p>Mächtigkeit der Ergebnismenge Ω bzw. der Ereignismenge E: Anzahl der möglichen bzw. der günstigen Ergebnisse</p> <p>Verknüpfungen: $A \cap B$: Schnittmenge von A und B („und“) $A \cup B$: Vereinigungsmenge von A und B („oder“)</p> 
<p>6.</p>	<p><u>Einstufige Zufallsexperimente</u></p> <p>Laplace-Regel: Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $P(E) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}} = \frac{ E }{ \Omega }$</p> <p>Ereignis und Gegenereignis: $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ bzw. $P(E) + P(\bar{E}) = 1$</p> <p>Additionsregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$</p>
<p>7.</p>	<p><u>Mehrstufige Zufallsexperimente</u></p> <p>Baumdiagramme</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Für jedes Ergebnis in jeder Stufe einen eigenen Zweig erstellen. 2. Die Zweige der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschriften. <p>1. Pfadregel: Entlang der Zweige die einzelnen Wahrscheinlichkeiten multiplizieren.</p> <p>2. Pfadregel: Wahrscheinlichkeiten mehrerer Pfade addieren.</p>

Stochastik
Selbstdiagnosebogen – Lösungen

1.	x_i	2	3	4	5	6	7	8
	abs. Häufigkeit f_i	3	2	4	2	4	3	2
	rel. Häufigkeit $h_i = \frac{f_i}{n}; n=20$	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{2}{20} = 0,1$



3.

a) arithm. Mittel: $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + \dots + x_n \cdot f_n}{n} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2}{20} = 4,95$

b) Median: $\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ (n gerade) $= \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{5 + 5}{2} = 5$

c) Modalwert (häufigster Wert): $x_{\text{mod}1} = 4, x_{\text{mod}2} = 6$ (zwei Modalwerte)

4.

a) Spannweite: $w = x_{\text{max}} - x_{\text{min}} = 8 - 2 = 6$

b) mittlere Abweichung vom arithm. Mittel: $d\bar{x} = \frac{|x_1 - \bar{x}| \cdot f_1 + \dots + |x_n - \bar{x}| \cdot f_n}{n}$
 $= \frac{|2-4,95| \cdot 3 + |3-4,95| \cdot 2 + |4-4,95| \cdot 4 + |5-4,95| \cdot 2 + |6-4,95| \cdot 4 + |7-4,95| \cdot 3 + |8-4,95| \cdot 2}{20}$
 $= 1,655$

c) Varianz (mittlere quadr. Abweichung vom arithm. Mittel): $V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{n}$
 $= \frac{(2-4,95)^2 \cdot 3 + (3-4,95)^2 \cdot 2 + (4-4,95)^2 \cdot 4 + (5-4,95)^2 \cdot 2 + (6-4,95)^2 \cdot 4 + (7-4,95)^2 \cdot 3 + (8-4,95)^2 \cdot 2}{20}$
 $= 3,6475$
 Standardabweichung: $s = \sqrt{V} = \sqrt{3,6475} \approx 1,91$ Tipp: Arbeitstabelle aufstellen

5.

a) $\Omega = \{RR, RS, RG, SS, SR, SG, GG, GR, GS\}$

b) $A = \{RS, RG, SR, SG, GR, GS\}$, $B = \{RG, SG, GG\}$

c) \bar{A} (Gegenereignis von A: beide Kugeln sind gleichfarbig) $= \{RR, SS, GG\}$
 $A \cap B = \{RG, SG\}$ (und)
 $A \cup B = \{RS, RG, SR, SG, GR, GS, GG\}$ (oder)

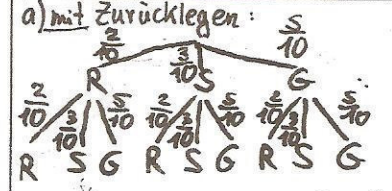
6.

$P(C) = \frac{2}{2+3+5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ allgemein: $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$

$P(D) = \frac{2+5}{10} = \frac{7}{10}$ bzw. $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

7.

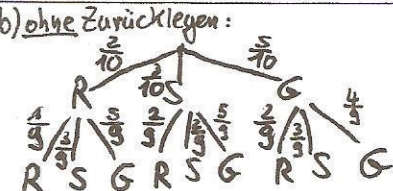
a) mit Zurücklegen:



allgemein:

- Wahrscheinlichkeit eines Pfades = Produkt der Wk. seiner Zweige
- Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses = Summe der Wk. aller Pfade, die dieses Ereignis bilden

b) ohne Zurücklegen:



$P(E) = P(\{RG\}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{90}$

$P(F) = P(\{RR, SS, GG\}) = \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{19}{50}$

$P(G) = 1 - P(\bar{G}) = 1 - P(\{SS\}) = 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{41}{100}$

$P(E) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$

$P(F) = \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{14}{45}$

$P(G) = 1 - \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) = \frac{14}{15}$