Quadratische Funktionen

Der Satz von Vieta

1. Entdecken Sie den Satz von Vieta.

a) Lösen Sie die quadratische Gleichung: $x^2 - 8x + 15 = 0$

$x_{1/2} = -\left(\frac{-8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15}$

$= 4 \pm \sqrt{1} = 4 \pm 1$

$x_1 =$ 3, $x_2 =$ 5

b) Bestimmen Sie die Summe und das Produkt der beiden Lösungen:

$x_1 + x_2 =$ 8 $\qquad x_1 \cdot x_2 =$ 15

c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus b) mit den Koeffizienten p und q. Was fällt Ihnen auf? Formulieren Sie einen Merksatz.

Das Produkt ist gleich q, die Summe ist gleich −p.
Hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt:

$x_1+x_2=-p$ bzw. $-(x_1+x_2)=p$ und $x_1 \cdot x_2=q$

d) Wie müsste die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lauten, deren Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -4$ sind?

$p=-(7-4)=-3$, $\qquad q=7\cdot(-4)=-28$

$x^2 -3x-28 = 0$

e) Bestimmen Sie anhand Ihrer gewonnen Erkenntnisse die Lösungen der Gleichung $x^2 + 5x + 4 = 0$.

$x_1+x_2=-5$, $\qquad x_1 \cdot x_2=4$

$x_1 =$ −4, $x_2 =$ −1

2. <u>Zusatz:</u> Beweisen Sie den Satz von Vieta durch direkte Rechnung.

Addiere x_1 und x_2

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 + x_2 = -p}}$$

Multipliziere x_1 und x_2

$$x_1 \cdot x_2 = \underbrace{\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)}_{\text{3. Binomische Formel}}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - D$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = q$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 \cdot x_2 = q}}$$